DEDUCCION ELEMENTAL DE LA FORMULA DE LAPLACE, SOBRE EL RADIO DE CONVERGENCIA DE LAS SERIES EN EL PROBLEMA DE LOS DOS CUERPOS

H. López
(Observatorio Astronómico, La Plata)

En este trabajo se demuestra la fórmula de Laplace:

$$1 \mp \sqrt{1+\upsilon^2} = \upsilon\, \varepsilon^{\mp\sqrt{1+\upsilon^2}}$$

que determina el radio de convergencia de la serie:

$$E = M + e \,\mathrm{sen}\, M + \frac{e^2}{2} D_M \,\mathrm{sen}^2 M + \dots$$

Estas tres variables están vinculadas por la ecuación de Keppler:

$$M = E - e \,\mathrm{sen}\, E$$

Diferenciando ésta, considerando la excentricidad como una variable compleja e introduciendo cuatro nuevas variables definidas por las relaciones:

$$e = \upsilon\, \varepsilon^{i\varphi} \qquad \sqrt{1-e^2} = \rho\, \varepsilon^{i\Phi}$$

se obtienen cuatro funciones implícitas de las variables: $\upsilon$, $\varphi$, $\rho$, $\Phi$, $M$.

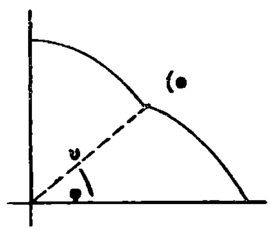
$$F = \upsilon \cos J\, \varepsilon^{\mp\rho \cos\Phi} \pm \rho \cos\Phi - 1 = 0 \qquad (1)$$

$$G = \upsilon \,\mathrm{sen}\, J\, \varepsilon^{\mp\rho \cos\Phi} \pm \rho \,\mathrm{sen}\, \Phi = 0 \qquad (2)$$

$$H = 1 - \upsilon^2 \cos 2\varphi - \rho^2 \cos 2\Phi = 0 \qquad (3)$$

$$I = \rho^2 \,\mathrm{sen}\, 2\Phi + \upsilon^2 \,\mathrm{sen}\, 2\varphi = 0 \qquad (4)$$

$$J = \varphi + M \mp \rho \,\mathrm{sen}\,\Phi$$




Estas funciones definen la curva de los puntos singulares, cuyas ecuaciones polares: $\upsilon = \upsilon(M)$, $\varphi = \varphi(M)$, se obtienen eliminando de este sistema: $\rho$ y $\Phi$.

El problema se convierte ahora en uno de mínimo, ya que el radio de convergencia estará determinado por la distancia al origen del punto singular más próximo.

Calculando las diferenciales totales de las funciones F, G, H e I, dividiendo por dM y utilizando la condición de mínimo resulta:

$$F_\varphi \frac{d\varphi}{dM} + F_\rho \frac{d\rho}{dM} + F_\Phi \frac{d\Phi}{dM} + F_M = 0$$

$$G_\varphi \frac{d\varphi}{dM} + G_\rho \frac{d\rho}{dM} + G_\Phi \frac{d\Phi}{dM} + G_M = 0$$

$$H_\varphi \frac{d\varphi}{dM} + H_\rho \frac{d\rho}{dM} + H_\Phi \frac{d\Phi}{dM} = 0$$

$$I_\varphi \frac{d\varphi}{dM} + I_\rho \frac{d\rho}{dM} + I_\Phi \frac{d\Phi}{dM} = 0$$

De este sistema, las tres primeras nos permiten obtener los valores de $\frac{d\varphi}{dM}$, $\frac{d\rho}{dM}$, $\frac{d\Phi}{dM}$ y reemplazándolos en la cuarta se obtiene una ecuación que con las F, G, H e I forma un sistema, no lineal, de cinco ecuaciones en las cinco incógnitas $\upsilon$, $\varphi$, $\rho$, $\Phi$, M.

$$I = \pm \left[ \upsilon\, \varepsilon^{\mp \rho \cos \Phi} \operatorname{sen} (\Phi - 2\varphi) - \operatorname{sen} (J + \Phi - 2\varphi) \right] = 0 \qquad (5)$$

De (1) y (2) eliminamos J y por lo tanto M ya que esta variable sólo aparece en J.

De la (3) y (4) eliminamos $\varphi$ y el sistema se reduce a tres ecuaciones en las incógnitas restantes $\rho$, $\upsilon$, $\Phi$.

(I) $\pm A \operatorname{sen} \Phi = 0$ (6) $\quad A = \upsilon^2(1-\rho^2)\, \varepsilon^{\mp 2\rho \cos \Phi} - 1 - \rho^2 \pm 2\rho \cos \Phi$

(II) $1 - 2\rho^2 \cos 2\Phi + \rho^4 - \upsilon^4 = 0$ (7)

(III) $1 \mp 2\rho \cos \Phi + \rho^2 - \upsilon^2 \varepsilon^{\mp 2\rho \cos \Phi} = 0$ (8)

Utilizando (8) resulta: $A \neq 0$

Luego: $\Phi = 0, \pi$

De (7) $\rho = \sqrt{\upsilon^2 + 1}$

Finalmente de (8) resulta: $1 \mp \sqrt{1 + \upsilon^2} = \upsilon\, \varepsilon^{\mp \sqrt{1+\upsilon^2}}$

Fórmula de Laplace que determina el radio de convergencia.